

FIDEAS CAPITAL

Capter des facteurs indépendants, clef de l'abaissement du risque

- I. Introduction
- II. Méthodes d'allocation d'abaissement du risque
- III. Etude des méthodes d'allocation d'abaissement du risque
- IV. Les propriétés d'invariance
- V. Conclusion

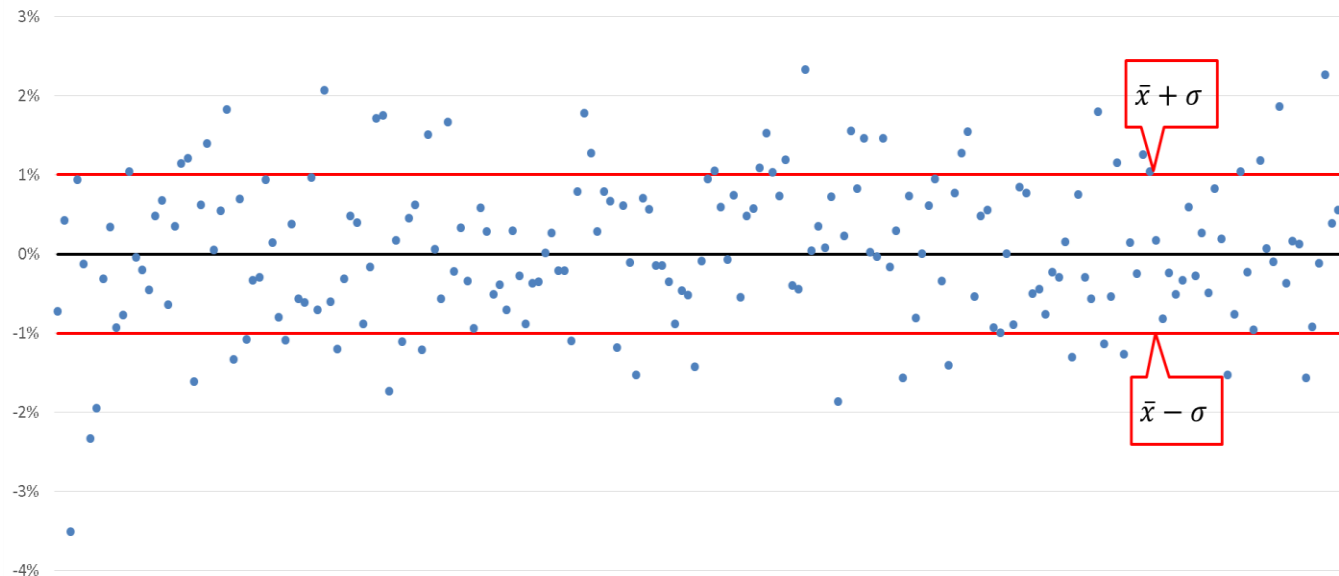
I. INTRODUCTION

Volatilité

- L'écart-type des performances d'un actif sur une période temporelle donnée s'assimile à la volatilité historique :

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2}$$

avec x_t le rendement de l'actif à la date t et \bar{x} la moyenne des rendements sur la période T .



- Si la distribution des rendements suit une loi normale, alors 68% des rendements sont compris entre $\bar{x} - \sigma$ et $\bar{x} + \sigma$.

I. INTRODUCTION

Covariance et corrélation

- La covariance mesure la simultanéité des écarts entre deux actifs :

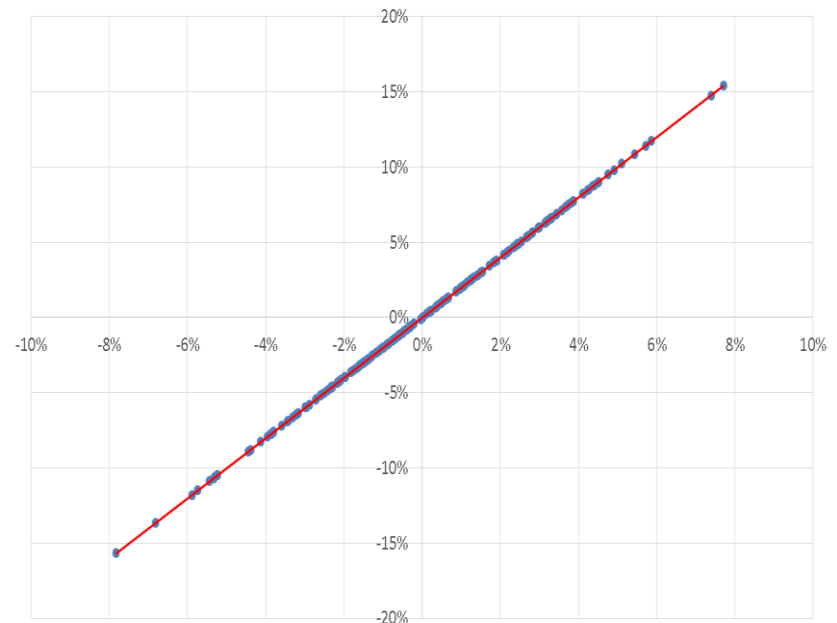
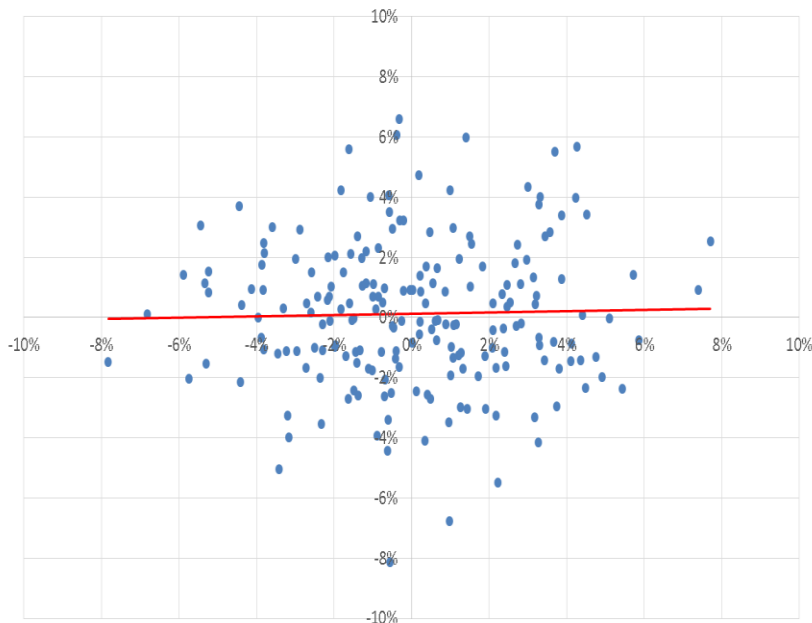
$$Cov(x, y) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})$$

avec x_t et y_t les rendements des actifs à la date t , \bar{x} et \bar{y} les moyennes des rendements sur la période T .

- La corrélation est la forme normalisée de la covariance :

$$\rho_{x,y} = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

avec σ_x et σ_y les écarts-types des actifs, et $\rho_{x,y} \in [-1, 1]$.



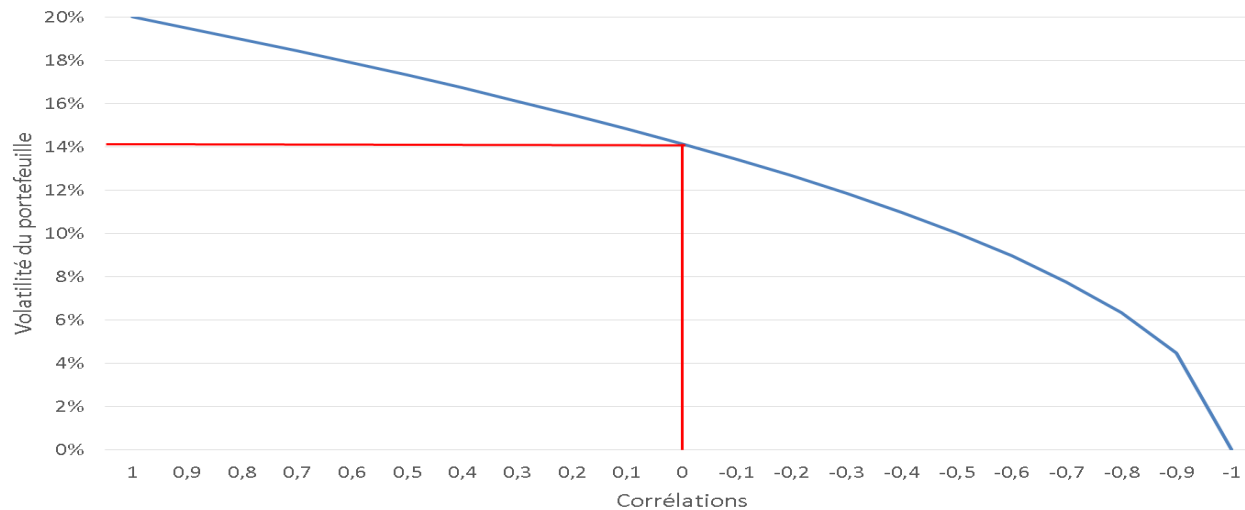
I. INTRODUCTION

Volatilité d'un portefeuille et impact des corrélations sur l'abaissement du risque

□ Volatilité d'un portefeuille :

- Cas pour 2 actifs : $\sigma_p = \sqrt{(w_x\sigma_x)^2 + (w_y\sigma_y)^2 + 2\rho_{x,y}w_x\sigma_xw_y\sigma_y}$

$$\sigma_1 = 0,2 ; \sigma_2 = 0,2 ; w_1 = 0,5 ; w_2 = 0,5$$



- Cas pour N actifs : $\sigma_p = \sqrt{w^T \Sigma w} = \sqrt{\sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j} \rho_{i,j} w_i w_j \sigma_i \sigma_j}$

avec w_i le poids de l'actif, σ_i l'écart-type de l'actif i , et $\rho_{i,j}$ la corrélation entre l'actif i et j .

- Si les actifs sont indépendants et les volatilités identiques alors la volatilité du portefeuille est égale à $\frac{\sigma_i}{\sqrt{N}}$.
- La recherche d'actifs individuellement peu volatils n'est pas le seul moyen d'abaissement du risque de portefeuille.
- L'allocation sur des actifs indépendants de volatilité élevée réduit rapidement et significativement le risque global de portefeuille.

II. MÉTHODES D'ALLOCATION D'ABAISSEMENT DU RISQUE

Définitions des méthodes d'allocation

- Equal Weight (EW) [1] :
 - Formule : $w_i = \frac{1}{N}$
 - Objectif : Diversification en nombre d'actifs

- Minimum variance (MV) [1952, 2, 3, 4] :
 - Objectif : Minimiser la volatilité globale du portefeuille
 - Formule : $\min_w \sqrt{w^T \Sigma w}$

- Maximum Diversification ® (MDP) [2008, 5] :
 - Objectif : Diversification liée aux corrélations
 - Formule : $\max_w \frac{w^T \sigma}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$

- Equal Risk Contribution (ERC) [2010, 6, 7, 8] :
 - Objectif : Egaliser les contributions marginales au risque
 - Formule : $\forall (i, j) w_i \frac{\partial \sigma(w)}{\partial w_i} = w_j \frac{\partial \sigma(w)}{\partial w_j}$

III. ETUDE DES MÉTHODES D'ALLOCATION D'ABAISSEMENT DU RISQUE

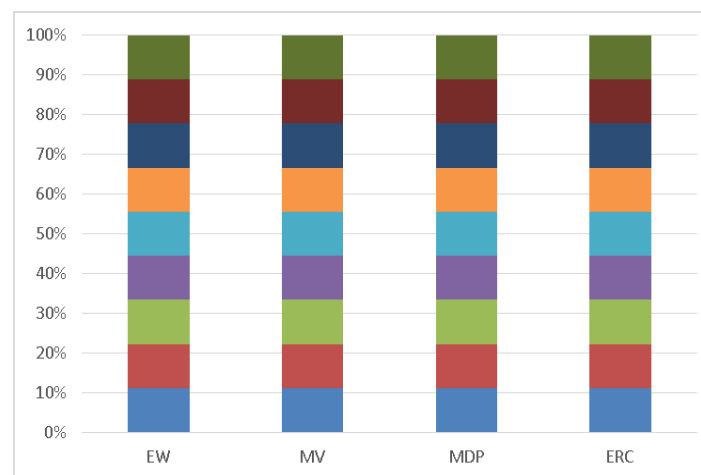
Cas théorique 1

- ☐ 9 actifs
- ☐ Volatilités identiques (17%)
- ☐ Corrélations identiques (matrice identité)

| Actif | Vol | Matrice de Corrélation | | | | | | | | |
|-------|-----|------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 17% | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| B | 17% | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C | 17% | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D | 17% | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E | 17% | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| F | 17% | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| G | 17% | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| H | 17% | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| I | 17% | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |



| | EW | MV | MDP | ERC |
|-------------------------|------|------|------|------|
| Poids | 1/N | 1/N | 1/N | 1/N |
| Volatilité portefeuille | 5,7% | 5,7% | 5,7% | 5,7% |
| Herfindahl | 9 | 9 | 9 | 9 |
| Ratio diversité | 3 | 3 | 3 | 3 |



Poids en %

- EW = MV = MDP = ERC
- Faible volatilité du portefeuille 5,7% car actifs indépendants
- L'indice d'Herfindahl est égal au nombre d'actifs car les actifs sont équipondérés
- Pour des actifs indépendants le ratio de diversité est égal à \sqrt{N}

III. ETUDE DES MÉTHODES D'ALLOCATION D'ABAISSEMENT DU RISQUE

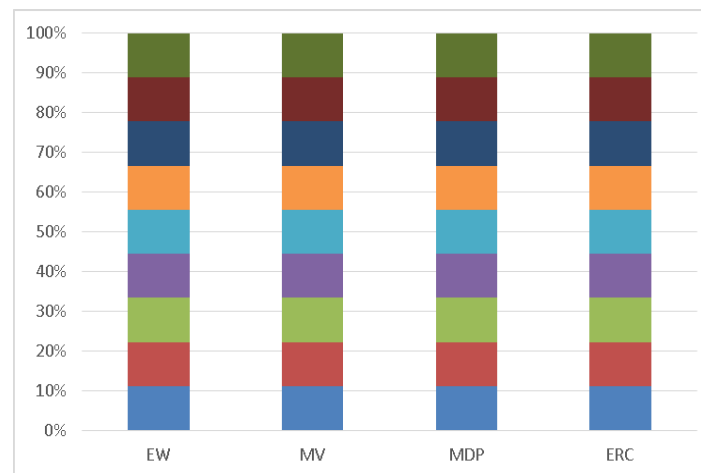
Cas théorique 2

- 9 actifs
- Volatilités identiques (17%)
- Corrélations identiques (0,5)

| Actif | Vol | Matrice de Corrélation | | | | | | | | | |
|-------|-----|------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| A | 17% | 1 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |
| B | 17% | 0,5 | 1 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |
| C | 17% | 0,5 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |
| D | 17% | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |
| E | 17% | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |
| F | 17% | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |
| G | 17% | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |
| H | 17% | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0,5 |
| I | 17% | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 1 | 0,5 |



| | EW | MV | MDP | ERC |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Poids | 1/N | 1/N | 1/N | 1/N |
| Volatilité portefeuille | 12,7% | 12,7% | 12,7% | 12,7% |
| Herfindahl | 9 | 9 | 9 | 9 |
| Ratio diversité | 1,34 | 1,34 | 1,34 | 1,34 |



- EW = MV = MDP = ERC
- Augmentation de la volatilité du portefeuille 12,7% car corrélations égales à 0,5
- L'indice d'Herfindahl est égal au nombre d'actifs
- Baisse du ratio de diversité car les actifs ne sont plus indépendants

Poids en %

III. ETUDE DES MÉTHODES D'ALLOCATION D'ABAISSEMENT DU RISQUE

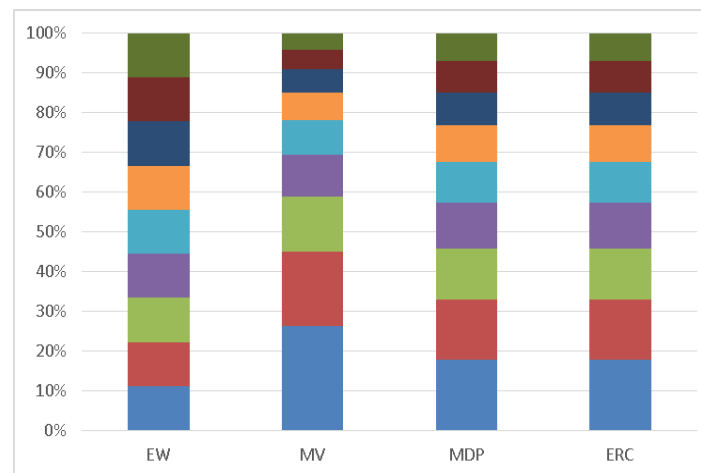
Cas théorique 3

- ☐ 9 actifs
- ☐ Volatilités non identiques (10 à 25%)
- ☐ Corrélations identiques (matrice identité)

| Actif | Vol | Matrice de Corrélation | | | | | | | | |
|-------|-----|------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 10% | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| B | 12% | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C | 14% | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D | 16% | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E | 18% | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| F | 19% | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| G | 21% | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| H | 23% | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| I | 25% | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |



| | EW | MV | MDP | ERC |
|-------------------------|------|------------------|------|------|
| Poids | 1/N | 1/σ ² | 1/σ | 1/σ |
| Volatilité portefeuille | 6,1% | 5,1% | 5,4% | 5,4% |
| Herfindahl | 9 | 6,5 | 8,2 | 8,2 |
| Ratio diversité | 2,90 | 2,87 | 3 | 3 |



Poids en %

- MDP = ERC
- Volatilité du portefeuille minimale pour MV (5,1%)
- Surpondération des actifs les moins volatils
- Ratio de diversité égal à 3 pour MDP et ERC car les actifs sont indépendants

III. ETUDE DES MÉTHODES D'ALLOCATION D'ABAISSEMENT DU RISQUE

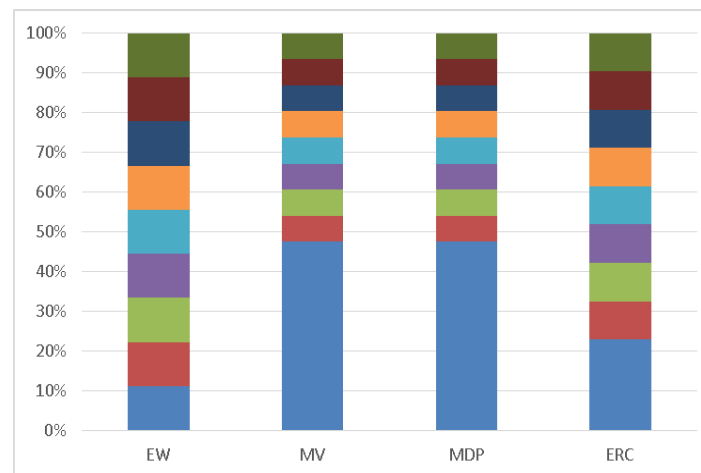
Cas théorique 4

- ❑ 9 actifs
- ❑ Volatilités identiques (17%)
- ❑ Corrélations identiques (0,9) avec un actif très peu corrélé à tous les autres (0,1)

| Actif | Vol | Matrice de Corrélation | | | | | | | | |
|-------|-----|------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| A | 17% | 1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |
| B | 17% | 0,1 | 1 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 |
| C | 17% | 0,1 | 0,9 | 1 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 |
| D | 17% | 0,1 | 0,9 | 0,9 | 1 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 |
| E | 17% | 0,1 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 1 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 |
| F | 17% | 0,1 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 1 | 0,9 | 0,9 | 0,9 |
| G | 17% | 0,1 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 1 | 0,9 | 0,9 |
| H | 17% | 0,1 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 1 | 0,9 |
| I | 17% | 0,1 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 1 |



| | EW | MV | MDP | ERC |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Poids | 1/N | | | |
| Volatilité portefeuille | 14,8% | 12,3% | 12,3% | 13,5% |
| Herfindahl | 9 | 3,85 | 3,85 | 7,89 |
| Ratio diversité | 1,15 | 1,38 | 1,38 | 1,26 |



Poids en %

- MV = MDP
- Volatilité du portefeuille minimale pour la MV et MDP (12,3%)
- Surpondération de l'actif le moins corrélé
- Ratio de diversité maximale pour MV et MDP (1,38)

III. ETUDE DES MÉTHODES D'ALLOCATION D'ABAISSEMENT DU RISQUE

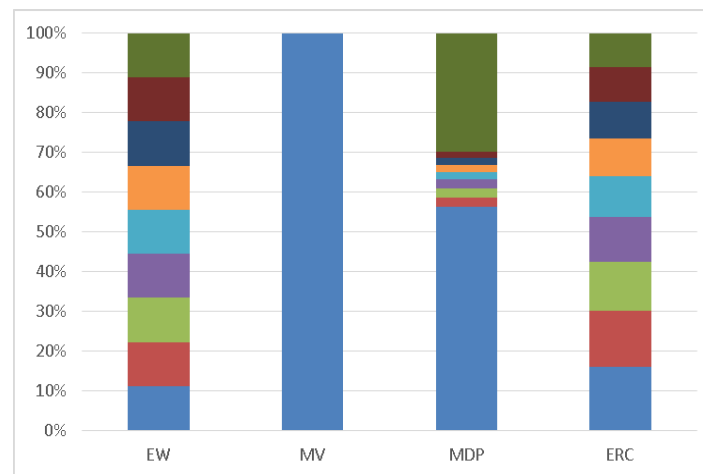
Cas théorique 5

- ❑ 9 actifs
- ❑ Volatilités non identiques (10 à 25%)
- ❑ Corrélations non identiques (0,65 à 0,95)

| Actif | Vol | Matrice de Corrélation | | | | | | | | |
|-------|-----|------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| A | 10% | 1 | 0,95 | 0,90 | 0,86 | 0,81 | 0,77 | 0,74 | 0,70 | 0,66 |
| B | 12% | 0,95 | 1 | 0,95 | 0,90 | 0,86 | 0,81 | 0,77 | 0,74 | 0,70 |
| C | 14% | 0,90 | 0,95 | 1 | 0,95 | 0,90 | 0,86 | 0,81 | 0,77 | 0,74 |
| D | 16% | 0,86 | 0,90 | 0,95 | 1 | 0,95 | 0,90 | 0,86 | 0,81 | 0,77 |
| E | 18% | 0,81 | 0,86 | 0,90 | 0,95 | 1 | 0,95 | 0,90 | 0,86 | 0,81 |
| F | 19% | 0,77 | 0,81 | 0,86 | 0,90 | 0,95 | 1 | 0,95 | 0,90 | 0,86 |
| G | 21% | 0,74 | 0,77 | 0,81 | 0,86 | 0,90 | 0,95 | 1 | 0,95 | 0,90 |
| H | 23% | 0,70 | 0,74 | 0,77 | 0,81 | 0,86 | 0,90 | 0,95 | 1 | 0,95 |
| I | 25% | 0,66 | 0,70 | 0,74 | 0,77 | 0,81 | 0,86 | 0,90 | 0,95 | 1 |



| | EW | MV | MDP | ERC |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Poids | 1/N | | | |
| Volatilité portefeuille | 16,3% | 10,0% | 13,3% | 14,9% |
| Herfindahl | 9 | 1 | 2,22 | 8,15 |
| Ratio diversité | 1,07 | 1 | 1,10 | 1,08 |



- Un seul actif choisi pour MV
- Surpondération des deux actifs les moins corrélés pour MDP
- Une légère surpondération des actifs les moins volatils pour l'ERC
- Chaque méthode retrouve ses propriétés

Poids en %

III. ETUDE DES MÉTHODES D'ALLOCATION D'ABAISSEMENT DU RISQUE

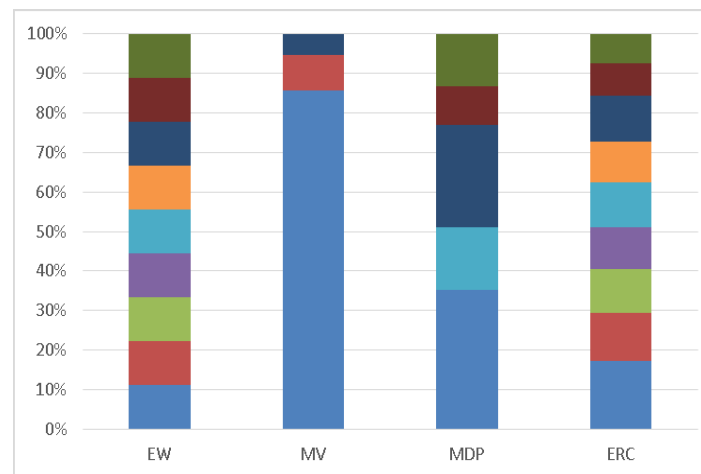
Cas actifs réels

- ❑ 9 indices pays (MSCI)
- ❑ Volatilités non identiques (11 à 24%)
- ❑ Corrélations non identiques (0,53 à 0,93)

| Actif | Vol | Matrice de Corrélation | | | | | | | | |
|-------------|-----|------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Suisse | 11% | 1 | 0,74 | 0,73 | 0,72 | 0,68 | 0,71 | 0,54 | 0,59 | 0,55 |
| Pays-Bas | 14% | 0,74 | 1 | 0,89 | 0,89 | 0,74 | 0,79 | 0,58 | 0,80 | 0,78 |
| Allemagne | 15% | 0,73 | 0,89 | 1 | 0,93 | 0,75 | 0,78 | 0,63 | 0,81 | 0,81 |
| France | 15% | 0,72 | 0,89 | 0,93 | 1 | 0,72 | 0,83 | 0,63 | 0,89 | 0,87 |
| Suède | 16% | 0,68 | 0,74 | 0,75 | 0,72 | 1 | 0,67 | 0,62 | 0,55 | 0,59 |
| Royaume-Uni | 17% | 0,71 | 0,79 | 0,78 | 0,83 | 0,67 | 1 | 0,66 | 0,74 | 0,73 |
| Norvège | 18% | 0,54 | 0,58 | 0,63 | 0,63 | 0,62 | 0,66 | 1 | 0,55 | 0,53 |
| Espagne | 21% | 0,59 | 0,80 | 0,81 | 0,89 | 0,55 | 0,74 | 0,55 | 1 | 0,88 |
| Italie | 24% | 0,55 | 0,78 | 0,81 | 0,87 | 0,59 | 0,73 | 0,53 | 0,88 | 1 |



| | EW | MV | MDP | ERC |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Poids | 1/N | | | |
| Volatilité portefeuille | 14,6% | 11,0% | 13,5% | 13,8% |
| Herfindahl | 9 | 1,34 | 4,11 | 8,52 |
| Ratio diversité | 1,15 | 1,06 | 1,21 | 1,16 |



- L'actif le moins volatil est choisi par MV (Suisse 86%)
- Surpondération des deux actifs les moins corrélés pour MDP, mais aussi allocation sur l'Italie car l'actif est diversifiant
- Une légère surpondération des actifs les moins volatils pour l'ERC

Poids en %

IV. LES PROPRIÉTÉS D'INVARIANCE

Définitions des propriétés d'invariance [9]

- ❑ Duplication :
 - Ajout dans l'univers d'un actif déjà présent , ou possédant exactement les mêmes propriétés statistiques (moyenne, volatilité , corrélation, etc.).
 - Exemple : action ordinaire versus action de préférence.

- ❑ Levier :
 - Une entreprise ou un actif déjà présent dans l'univers est traité avec un effet de levier.
 - Exemple : Holding qui s'endette pour acheter une participation d'un titre coté et ce titre reste coté.

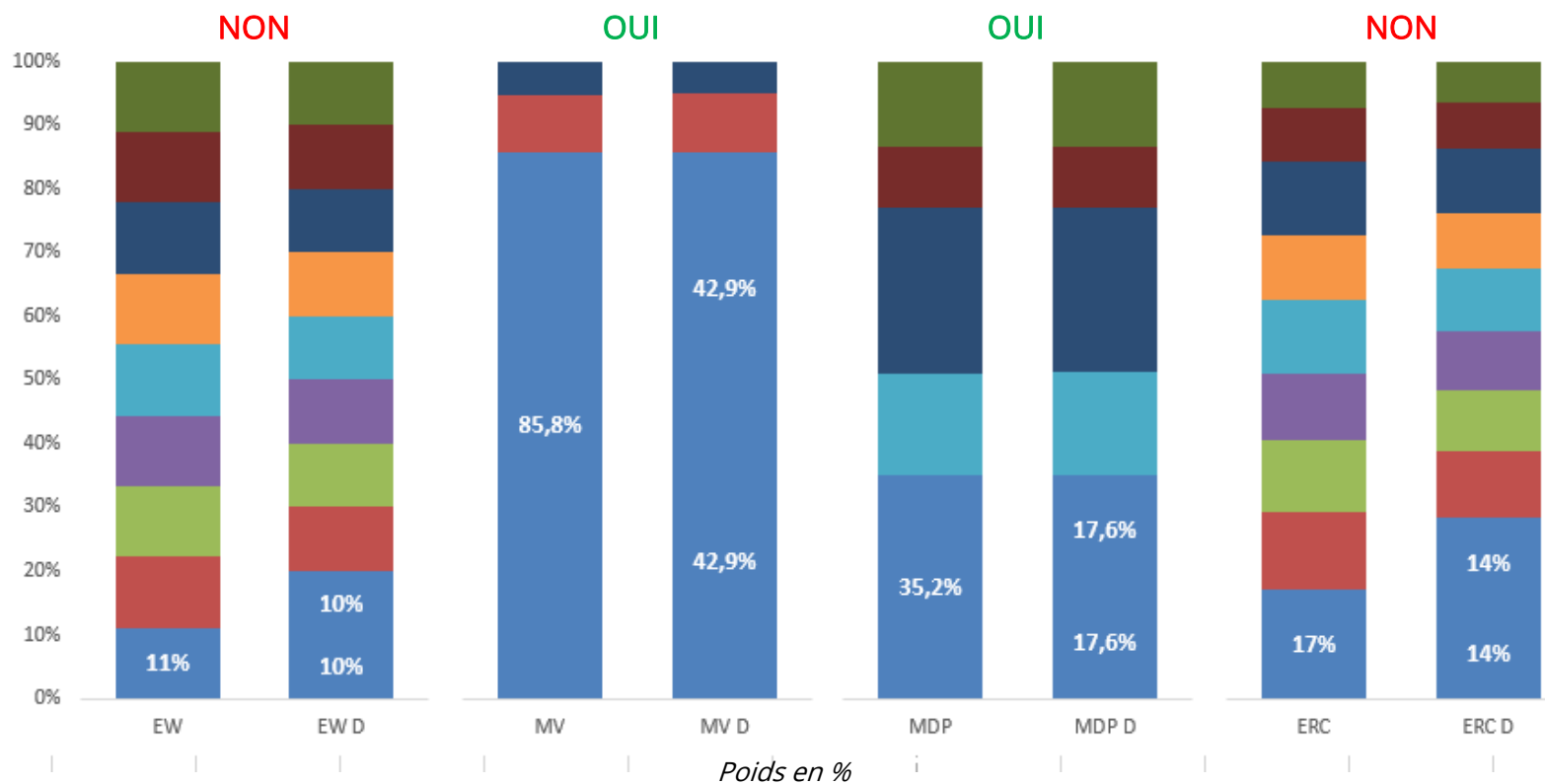
- ❑ Composite:
 - ❑ Ajout dans l'univers d'un actif composé d'un sous-ensemble déjà présent dans l'univers de départ.
 - ❑ Exemple : Holding avec des participations dans des titres cotés et présents dans l'univers.

| | Duplication | Levier | Composite |
|-----|-------------|--------|-----------|
| EW | Non | Non | Non |
| MV | Oui | Non | Non |
| MDP | Oui | Oui | Oui |
| ERC | Non | Oui | Non |

IV. LES PROPRIÉTÉS D'INVARIANCE

Duplication

- Nous ajoutons dans l'univers un deuxième indice Suisse.

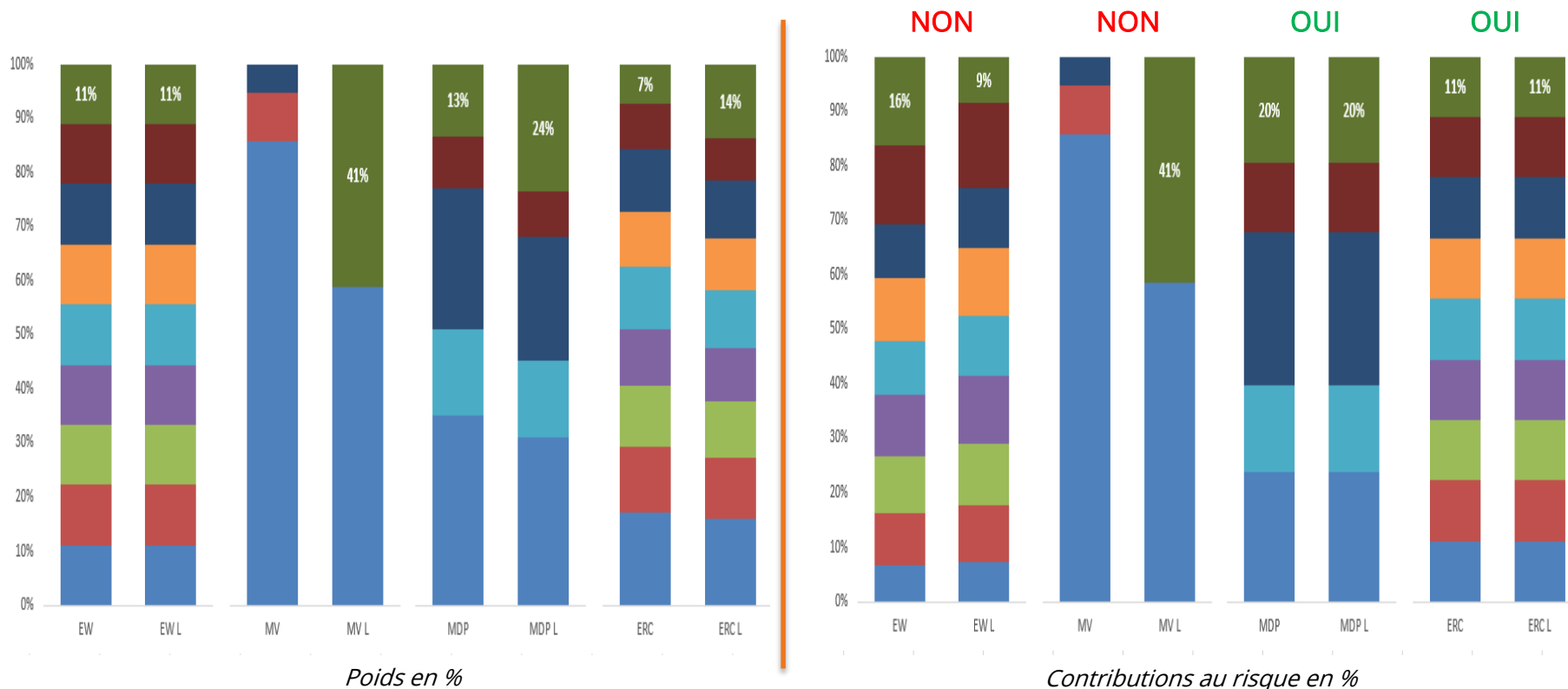


- Les méthodes Minimum Variance et Variété Maximale sont invariantes à la duplication car les poids sur la Suisse sont inchangés.

IV. LES PROPRIÉTÉS D'INVARIANCE

Levier

- Nous remplaçons dans l'univers l'indice Italie par un actif composé de 1/2 Italie et 1/2 Cash.

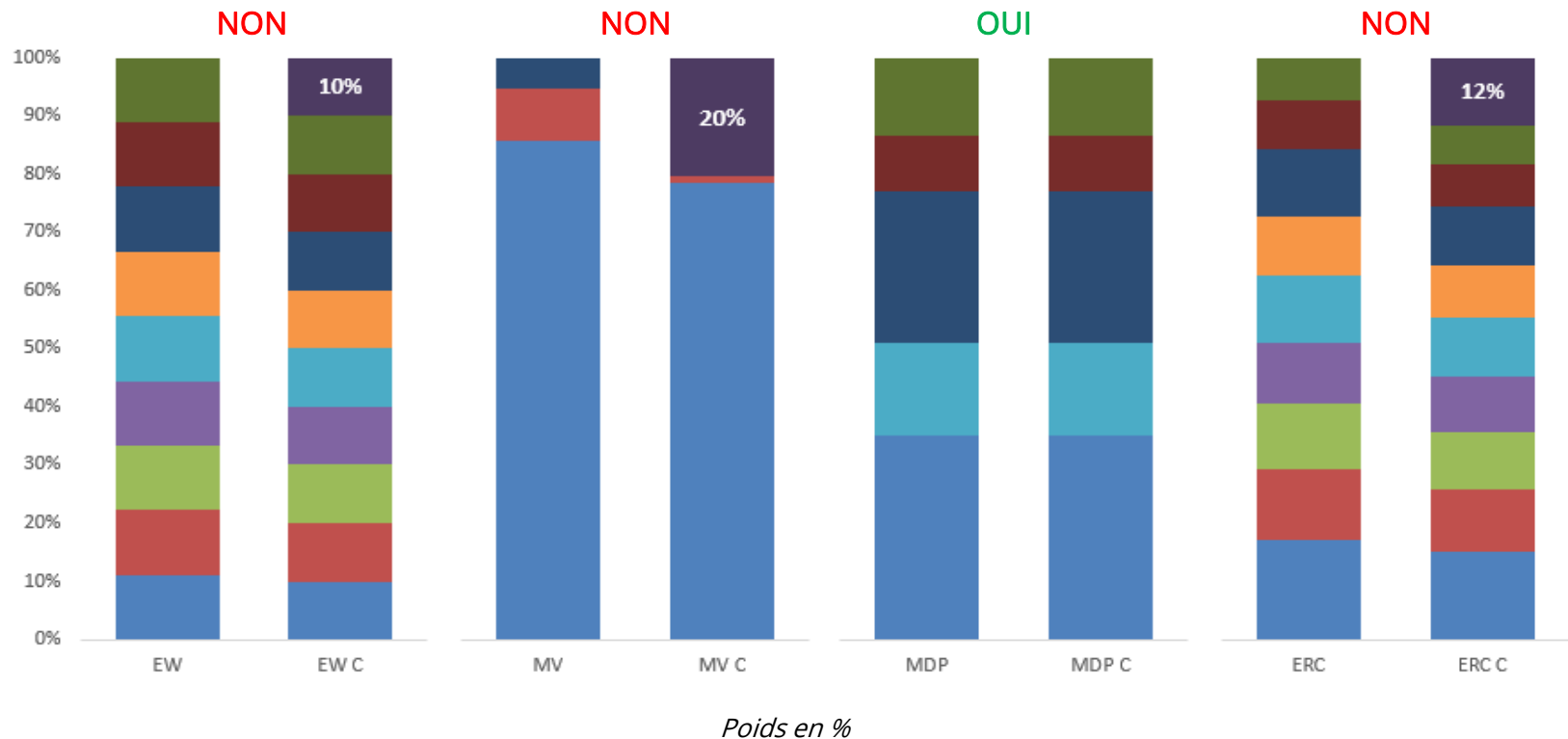


- Les méthodes Variété Maximale et ERC sont invariantes à l'effet de levier car les contributions au risque sont inchangées.

IV. LES PROPRIÉTÉS D'INVARIANCE

Composite

- Nous ajoutons dans l'univers un nouvel actif composé d'une combinaison linéaire d'actifs déjà présents dans l'univers. L'actif composite est composé de 1/3 Norvège, 1/3 Pays-Bas et 1/3 Suisse.



- Au vu des résultats, seule la Variété Maximale est invariante au Composite, car les poids sont inchangés, et la méthode n'alloue pas sur l'actif Composite.

VI. CONCLUSION

- La recherche d'actifs individuellement peu volatils n'est pas le seul moyen d'abaissement du risque de portefeuille.
- L'allocation sur des actifs indépendants de volatilité élevée réduit rapidement et significativement le risque global de portefeuille.
- Si les facteurs composant l'univers sont indépendants avec des volatilités identiques, alors les trois méthodes d'allocation sont équivalentes à un Equal Weight.
- Si les facteurs composant l'univers sont indépendants avec des volatilités non identiques, alors les méthodes Maximum Diversification et ERC sont équivalentes.
- La méthode Minimum Variance a tendance à allouer sur les actifs les moins volatils, et construit des portefeuilles très concentrés.
- La méthode Maximum Diversification est la seule qui respecte les trois propriétés d'invariance (duplication, levier, composite).

RÉFÉRENCES

- [1] V.DeMiguel, L.Garlappi, and R.Uppal. Optimal versus naive diversification : How inefficient is the 1/n portfolio strategy ? *The review of financial studies*, 22:1915-1953, 2009.
- [2] Harry Markowitz. Portfolio Selection, *Journal of Finance*, 7 (1), 77-91, 1952.
- [3] Haugen, Robert A., and A. James Heins. Risk and the Rate of Return on Financial Assets: Some Old Wine in New Bottles. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 10: 775-784, 1975.
- [4] R.Clarke, H.de Silva, and S.Thorley. Minimum-Variance Portfolio Composition. *Journal of Portfolio Management*, 37:31-45, 2011.
- [5] Y.Choueifaty, and Y.Coignard. Toward Maximum Diversification. *The Journal of Portfolio Management*, 35:40-51, 2008.
- [6] E. Qian (a). Risk parity portfolios: Efficient portfolios through true diversification. *PanAgora Asset Management*, 2005.
- [7] E. Qian (b). Risk parity portfolios: The next generation. *PanAgora Asset Management*, 2009.
- [8] S.Maillard, T.Roncalli, and J.Teiletche. On the properties of equally-weighted risk contributions portfolios. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1271972>, 2010.
- [9] Y.Choueifaty, T.Froidure, and J.Reynier. Properties of the most diversified portfolio. *Journal of Investment Strategies*, 2:49-70, 2013.

Fideas Capital

21 avenue de l'Opéra 75001 Paris

- Ce document, à caractère promotionnel, est établi par FIDEAS CAPITAL.
- Fideas Capital est une "Société par Actions Simplifiée" (SAS) créée en France, Société de Gestion de Portefeuille régulée par l'Autorité des Marchés Financiers" ("AMF") sous le numéro GP-07000046. L'AMF est située au 17, place de la Bourse 75082 – Paris Cedex 02 France
- Ce document est strictement réservé aux investisseurs professionnels, selon la définition de MIFID. Il ne peut être utilisé dans un but autre que celui pour lequel il a été conçu et ne peut pas être reproduit, diffusé ou communiqué à des tiers en tout ou partie sans l'autorisation préalable et écrite de Fideas Capital.
- Aucune information contenue dans ce document ne saurait être interprétée comme possédant une quelconque valeur contractuelle. Ce document est produit à titre purement indicatif.
- Fideas Capital se réserve la possibilité de modifier les informations présentées dans ce document à tout moment et sans préavis. Ces informations ne constituent en aucun cas un engagement de la part de Fideas Capital.
- Les performances passées ne sont pas une indication fiables des performances futures, il existe un risque de perte en capital. Les investisseurs sont invités à se reporter aux documents l'égaux des fonds avant tout investissement.
- © Fideas Capital (2017). Tous droits réservés